

Областной этап олимпиады школьников Челябинской области
по математике
2022-2023 учебный год
5 класс
Решения

Максимальный балл – 35, по 7 баллов за задачу

1. Победителям олимпиады были вручены награды трех степеней. Число наград первой степени было на 12 меньше, чем второй степени. Наград третьей степени было вручено в два раза больше, чем первой и второй вместе, но на 24 меньше произведения числа наград первой и второй степени. Сколько всего наград каждой из степеней получили участники олимпиады?

Решение:

Перебор по количеству наград первой степени

1 степень	2 степень	3 степень		
		1ст * 2 ст - 24	2*(1ст+2ст)	Подходит?
1	13	$13 - 24 = -11$	28	Нет
2	14	$28 - 24 = 4$	32	Нет
3	15	$45 - 24 = 11$	36	Нет
4	16	$64 - 24 = 40$	40	Да
5	17	$85 - 24 = 61$	44	Нет

Ответ: 4 награды первой степени, 16 наград второй степени, 40 наград третьей степени.

Критерии: верный ответ без объяснений – 4 балла.

2. Буквы А, И, Б сидели на трубе. Одна из них упала, другая пропала, третья осталась на трубе. Буква А сказала: «А упала, Б пропала». Буква И сказала: «На самом деле это я упала; и буква Б тоже упала». Буква Б промолчала, но подумала про себя, что обе высказавшиеся буквы сказали одно верное и одно неверное утверждение. Кто остался на трубе, если Б права?

Решение: пусть первое из утверждений буквы А верно, а второе нет. Составим таблицу (выделены два знака, непосредственно получающиеся из нашего предположения) :

	Упала	Пропала	Осталась на трубе
Буква А	+	-	-
Буква И	-	+	-
Буква Б	-	-	+

В этом случае оба утверждения буквы Б неверны, что противоречит условию.

Предположим теперь, что второе из утверждений буквы А верно, а первое нет:

	Упала	Пропала	Осталась на трубе
Буква А	-	-	+
Буква И	+	-	-
Буква Б	-	+	-

В этом случае первое утверждение буквы И верно, а второе нет. Это соответствует условию.

Ответ: на трубе осталась буква А.

Критерий: верный ответ без объяснений – 2 балла, верный ответ с демонстрацией того, что он соответствует условиям – 4 балла.

3. Можно ли расставить на листе бумаги 4 точки так, чтобы попарные расстояния между ними равнялись 1, 2, 3, 4, 5 и 6 сантиметров.

Решение: да, можно. Например, поставим на координатной прямой точки А(0), В(1), С(4), D (6). Тогда АВ = 1, CD = 2, BC = 3, AC = 4, BD = 5, AD = 6.

Критерии: верный ответ – 7 баллов.

4. Отличник Вася не любит цифры 1 и 2. Сколько времени займет у него написать все семизначные числа (по 7 секунд на число), такие что для каждого из них выполняются все три условия: нет нелюбимых Васей цифр, цифры в числе не повторяются, каждое делится на 990?

Решение:

Так как числа делятся на $990 = 9 \cdot 11 \cdot 10$, то число оканчивается нулем, а шестизначное число слева от нуля делится на 9 и на 11, а значит, обозначив за A и B сумму цифр, стоящих в этом шестизначном числе на чётных (считая слева) и нечётных местах соответственно, получим, что $A+B$ делится на 9, а $A-B$ делится на 11. С учетом того, что эти шесть цифр – это какие-то 6 цифр из 7 цифр от 3 до 9, то, так как чётность разности равна чётности суммы

$$\begin{cases} A+B=36 \\ A-B=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} A+B=36 \\ A-B=22 \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} A=18 \\ B=18 \end{cases} (1) \text{ или } \begin{cases} A=29 \\ B=7 \end{cases} (2)$$

$3+4+5+6+7+8+9=42$, значит, единственный вариант получить шесть цифр с суммой 36 – это убрать 6.

Случай (1). Выберем из шести цифр 3; 4; 5; 7; 8; 9 набор из трёх цифр, в котором есть 9.

$18=9+4+5$. Это единственный такой набор. Шесть вариантов поставить 9, 4 и 5 на чётные места и шесть вариантов – на нечётные. Итого 12 вариантов. Остальные три места заполняются цифрами 3; 7; 8. Получим $12 \cdot 6 = 72$ варианта.

Случай (2). Минимальное значение $B=3+4+5=12$. Следовательно, в случае (2) решений нет.

Итак, 72 варианта, по 7 секунд на каждый. $72 \cdot 7 = 504$.

Ответ: 504.

Критерии: верно сведено к соответствию признакам делимости – 1 балл; существенное продвижение в формулировке систем (1) и (2) и набора возможных цифр исходя из признаков делимости – 2 балла, то же, но без ошибок – 3 балла. Наличие верной общей схемы, несмотря на некоторые существенные ошибки – 4 балла, только вычислительные ошибки – 5 баллов.

5. Вася записал на доске три различных натуральных числа. Если бы он увеличил наибольшее число на 1, то произведение всех трёх чисел на доске оказалось бы равно 84. А если бы Вася увеличил наименьшее число на 1, то произведение всех трёх чисел на доске оказалось бы равно 96. Чему будет равно произведение всех трёх чисел, если мальчик увеличит среднее число на 1?

Решение: если к наибольшему из различных чисел добавить единицу, то числа останутся различными. Представить число 84 в виде произведения трех различных чисел можно восьмью способами: $84=42 \cdot 2 \cdot 1=28 \cdot 3 \cdot 1=21 \cdot 4 \cdot 1=14 \cdot 6 \cdot 1=14 \cdot 3 \cdot 2=12 \cdot 7 \cdot 1=7 \cdot 6 \cdot 2=7 \cdot 4 \cdot 3$. Это значит, что исходный набор чисел был одним из следующих: $\{41,2,1\}$, $\{27,3,1\}$, $\{20,4,1\}$, $\{13,6,1\}$, $\{13,3,2\}$, $\{11,7,1\}$, $\{8,6,2\}$, $\{6,4,3\}$. Теперь, если наименьшее из чисел набора увеличивать на 1, то произведение 96 получится только для набора $\{6,4,3\}$. Следовательно, набор был именно таким. Если увеличить среднее число, то произведение будет равно $6 \cdot 5 \cdot 3=90$.

Ответ: 90.

Существенное продвижение – 2 балла, верная схема решения при наличии ошибок – 4 балла.