

Областной этап всероссийской олимпиады школьников  
по математике  
2022-2023 учебный год  
7 класс

Максимальный балл – 35

1. Расставьте в вершинах квадрата натуральные числа так, чтобы в каждых двух соседних вершинах стояли не взаимно простые числа, а в каждых двух не соседних вершинах – взаимно простые.

**Решение.** Около сторон квадрата напишем числа 2, 3, 5, 7, а в каждой вершине напишем произведение чисел, указанных на сторонах, которые сходятся в ней. Тогда числа в соседних вершинах делятся на число, указанное на их общей стороне, и не являются взаимно простыми. А числа в не соседних вершинах равны произведению различных простых чисел, поэтому не могут делиться одновременно ни на какое простое число.

**Критерии.** Полное решение – 7 баллов. Если приведён рабочий пример без объяснения почему он работает – баллы не снижать. Пример не единственный, нужно проверять.

2. Один водитель сделал на 12,5% больше рейсов, чем второй, на зато второй каждый раз перевозил в 1,5 раза больше груза. Кто перевёз больше и на сколько процентов?

**Ответ.** Второй перевёз больше на  $33\frac{1}{3}\%$ .

**Решение.** В задаче идёт речь о трёх величинах. Первая – количество рейсов. Вторая – масса груза, перевозимого за один рейс. Тогда третья – масса всего перевезённого груза – измеряется в тоннах. Заполним таблицу

	Рейсов	Производительность, тонн/рейс	Перевёз всего тонн
Первый водитель	$1,125x$	$y$	$1,125xy$
Второй водитель	$x$	$1,5y$	$1,5xy$

При заполнение таблицы задача почти «решилась сама». Осталось заметить, что второй водитель привёз больше, чем первый. Для ответа на вопрос можно составить пропорцию, приняв груз первого водителя  $1,125xy$  за 100%. Вместо этого можно найти сначала, во сколько раз больше привёз второй водитель, а затем перейти к процентам:

$$\frac{1,5xy}{1,125xy} = \frac{3}{2} : \frac{9}{8} = \frac{4}{3}.$$

Итак, второй привёз больше на треть, то есть на  $33\frac{1}{3}\%$ .

**Критерии.** Полное решение – 7 баллов. Ответ можно принимать в виде как десятичного числа, так и в виде дроби. Только правильный ответ без объяснений – 0 баллов.

3. По кругу стоит  $2n + 1$  человек – рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Есть хотя бы один лжец и хотя бы один рыцарь. Какое наибольшее количество человек могло сказать: «Через одного человека от меня есть рыцарь»?

**Ответ.**  $2n$ .

**Решение.** Предположим, что все люди сказали указанную в условии фразу. Рассмотрим любого лжеца (хотя бы один лжец есть по условию). Так как он сказал, что через одного человека от него есть рыцарь, и при этом он солгал, оба человека, стоящие от него через одного, также являются лжецами. Продолжая аналогичные рассуждения, мы получим, что все люди будут лжецами (здесь мы используем, что  $2n + 1$  – нечётно). Значит, количество

людей, сказавших указанную фразу, не больше  $2n$ . Если по кругу стоят  $2n$  рыцарей и один лжец, то все рыцари могут сказать указанную фразу.

**Критерии.** Полное решение – 7 баллов. Оценка – 3 балла, пример – 2 балла.

**Типовой ошибкой** может быть такое рассуждение: заметим, что если расставить  $2n$  рыцарей и 1 лжеца, то все рыцари скажут указанную фразу, а больше быть не может, так как должен быть хотя бы 1 лжец – 2 балла. Так как вдруг какая-то комбинация лжецов и рыцарей даст большее количество. То есть такое рассуждение это просто пример.

Только правильный ответ без объяснений – 0 баллов.

4. Катя вырезала из картона равносторонний треугольник  $T$ . Миша заметил, что может легко закрыть Катин треугольник  $T$  пятью своими равносторонними треугольниками одинакового размера (треугольники могут перекрываться и выступать за пределы треугольника  $T$ ). Дима утверждает, что может полностью закрыть треугольник  $T$  и четырьмя Мишиными треугольниками. Докажите, что Дима прав.

**Решение.** Отметим шесть точек: вершины треугольника  $T$  и середины его сторон. Тогда один из треугольников закрывает по крайней мере две их отмеченных точек (принцип Дирихле), то есть его сторона не меньше  $\frac{a}{2}$ , где  $a$  – длина стороны треугольника  $T$  (в равностороннем треугольнике наибольшим расстоянием между двумя точками является расстояние между вершинами). Значит, каждый из четырёх треугольников, на которые  $T$  разбивается средними линиями, закрывается одним из данных треугольников.

**Критерии.** Полное решение – 7 баллов. Утверждение «в равностороннем треугольнике наибольшим расстоянием между двумя точками является расстояние между вершинами» считать известным, за отсутствие его доказательства баллы не снижать. Утверждение, что Мишин треугольник имеет сторону не меньше  $\frac{a}{2}$  не доказано или доказано неверно – снять 4 балла.

5. Данил выбрал четыре натуральных числа  $a, b, c, d$  и выписал 12 дробей:

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a}{c}, \quad \frac{a}{d}, \quad \frac{b}{a}, \quad \frac{b}{c}, \quad \frac{b}{d}, \quad \frac{c}{a}, \quad \frac{c}{b}, \quad \frac{c}{d}, \quad \frac{d}{a}, \quad \frac{d}{b}, \quad \frac{d}{c}.$$

Докажите, что какие-то две дроби отличаются не больше чем на  $11/60$ .

**Решение.** Заметим, что если Данил выбрал два одинаковых числа (например,  $a$  и  $b$ ), то он написал две дроби, равные 1 (в нашем примере  $a/b$  и  $b/a$ ), и тогда утверждение задачи очевидно. Значит, можно считать, что все числа, написанные Данилом различны.

Упорядочим все дроби, выписанные Данилом, в порядке возрастания:  $p_1, p_2, \dots, p_{12}$ . Тогда дроби  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$  меньше 1, а  $p_7$  – самая маленькая из дробей, превосходящих 1. Нетрудно догадаться, что  $p_7 = \frac{1}{p_6}$ ,  $p_8 = \frac{1}{p_5}$  и так далее.

Предположим, что любые две дроби отличаются больше чем на  $x = \frac{11}{60}$ . Тогда

$$p_1 > 0, \quad p_2 > p_1 + x, \quad p_3 > p_2 + x > 2x, \dots, p_7 > p_6 + x > 6x.$$

Следовательно,  $1 = p_6 p_7 > 5x \cdot 6x = 5 \cdot \frac{11}{60} \cdot 6 \cdot \frac{11}{60} = \frac{121}{120}$ . Получили противоречие.

**Критерии.** Полное решение – 7 баллов. Приведён набор чисел при котором какие-то две дроби отличаются не больше чем на  $11/60$  – 2 балла.