

**Областной этап олимпиады школьников Челябинской области
по математике**

2022-2023 учебный год

6 класс

Решения

Максимальный балл – 35, по 7 баллов за задачу

- 1. Победителям олимпиады были вручены награды трех степеней. Число наград первой степени Сумма нескольких чисел равна 2023. Может ли сумма их квадратов быть меньше, чем $\frac{1}{2023}$?**

Решение: да, может. Возьмём $2023 \cdot 2024^2$ чисел $\frac{1}{2024^2}$. Нетрудно видеть, что их сумма 2023. А сумма их квадратов равна $2023 \cdot 2024^2 \cdot \frac{1}{2024^4} = \frac{2023}{2024^2} < \frac{2024}{2024^2} < \frac{1}{2024} < \frac{1}{2023}$.

Критерии: любой верный пример – 7 баллов.

- 2. Ребята попросили у Гарри посмотреть на его новую метлу, но едва Гарри отвернулся, как метла оказалась сломанной. Рон сказал: «Это Фред или Джордж». Фред сказал: «Это сделал не я и не Невилл». Джордж сказал: «Вы оба шутите». Ли сказал: «Нет, один из них сказал правду, а другой — нет». Невилл сказал: «Нет, Ли, ты не прав». Кто сломал метлу, если известно, что соврали ровно двое.**

Решение:

Перепишем условие, перенумеровав условия:

- 1) Рон сказал: «Это Фред или Джордж».
- 2) Фред сказал: «Это сделал не я и не Невилл».
- 3) Джордж сказал: «Вы оба шутите».
- 4) Ли сказал: «Нет, один из них сказал правду, а другой — нет».
- 5) Невилл сказал: «Нет, Ли, ты не прав».

Неверных утверждений должно быть два.

Если бы метлу сломал Рон, то были бы неверны три утверждения 1), 3), 5).

Если бы метлу сломал Фред, то были бы неверны три утверждения 2), 3), 5).

Если бы метлу сломал Юра, то были бы неверны три утверждения 1), 3), 5).

Если бы метлу сломал Ли, то были бы неверны три утверждения 1), 3), 5).

Метлу сломал Джордж, при этом неверны утверждения 3), 4).

Ответ: Джордж

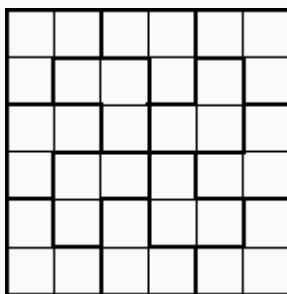
Критерии: верный ответ без объяснений – 0 баллов, верный ответ и показано, что этот ответ подходит – 3 балла, полное решение – 7 баллов.

- 3. Можно ли из трёхклеточных уголков (см. рис.) составить квадрат 6×6 так, чтобы никакие два уголка не образовывали прямоугольник 2×3?**



Решение

См. рис.



Любой верный пример – 7 баллов.

4. Отличник Вася не любит цифры 1 и 2. Сколько времени займет у него написать все семизначные числа (по 7 секунд на число), такие что для каждого из них выполняются все три условия: нет нелюбимых Васей цифр, цифры в числе не повторяются, каждое делится на 990?

Решение:

Так как числа делятся на $990 = 9 \cdot 11 \cdot 10$, то число оканчивается нулем, а шестизначное число слева от нуля делится на 9 и на 11, а значит, обозначив за A и B сумму цифр, стоящих в этом шестизначном числе на чётных (считая слева) и нечётных местах соответственно, получим, что $A+B$ делится на 9, а $A-B$ делится на 11. С учетом того, что эти шесть цифр – это какие-то 6 цифр из 7 цифр от 3 до 9, то, так как чётность разности равна чётности суммы

$$\begin{cases} A+B=36 \\ A-B=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} A+B=36 \\ A-B=22 \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} A=18 \\ B=18 \end{cases} (1) \text{ или } \begin{cases} A=29 \\ B=7 \end{cases} (2)$$

$3+4+5+6+7+8+9=42$, значит, единственный вариант получить шесть цифр с суммой 36 – это убрать 6.

Случай (1). Выберем из шести цифр 3; 4; 5; 7; 8; 9 набор из трёх цифр, в котором есть 9.

$18=9+4+5$. Это единственный такой набор. Шесть вариантов поставить 9, 4 и 5 на чётные места и шесть вариантов – на нечётные. Итого 12 вариантов. Остальные три места заполняются цифрами 3; 7; 8. Получим $12 \cdot 6 = 72$ варианта.

Случай (2). Минимальное значение $B=3+4+5=12$. Следовательно, в случае (2) решений нет.

Итак, 72 варианта, по 7 секунд на каждый. $72 \cdot 7 = 504$.

Ответ: 504.

Критерии: верно сведено к соответствию признакам делимости – 1 балл; существенное продвижение в формулировке систем (1) и (2) и набора возможных цифр исходя из признаков делимости – 2 балла, то же, но без ошибок – 3 балла. Наличие верной общей схемы, несмотря на некоторые существенные ошибки – 4 балла, только вычислительные ошибки – 5 баллов.

5. На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 2022$. За один ход стирают любые два и записывают вместо них одно число – их разность, вычитая из большего меньшее. Какое наибольшее число может остаться на доске после 2021-го хода?

Решение: понятно, что каждое число, записанное на доске в любой момент, не превышает 2022

Так как разность имеет такую же чётность, как сумма, то при осуществлении каждой операции чётность суммы всех записанных на доске чисел не меняется. В начале сумма чисел на доске нечётная, она равна $(2022+1) \cdot 1011$. Таким образом, в конце на доске не может остаться чётное число 2022. Покажем, что может остаться число 2021. Разобьём числа на следующие пары: (2;3), (4;5), ..., (2020;2021) и (1;2022). Если применить операцию по очереди в каждой из приведенных пар, на доске будут записано 1010 чисел 1 и число 2022. Остается дальше разбить числа 1 на 505 пары, вместо каждой из которых будет записан 0. Далее 505 раз вычитая из 2021 ноль, будем получать 2021. Это число и останется последним.

Ответ: 2021.

Критерии: верный ответ без объяснений – 0 баллов. Объяснение, почему не может быть больше, чем 2021, без примера – 3 балла, пример, как можно получить 2021, без объяснения, почему нельзя получить 2022 – 3 балла, полное решение – 7 баллов.