

Областной этап всероссийской олимпиады школьников
по математике
2022-2023 учебный год
8 класс

Максимальный балл – 35

1. Расставьте в вершинах куба натуральные числа так, чтобы если вершины соединены ребром, то числа, стоящие в них не взаимно простые, а если не соединены – то взаимно простые.

Решение. Около рёбер куба напомним числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 (можно поставить другие простые числа), а в каждой вершине напомним произведение чисел, указанных на рёбрах, которые сходятся в ней. Тогда числа в соседних вершинах делятся на число, указанное на их общей стороне, и не являются взаимно простыми. А числа в не соседних вершинах равны произведению различных простых чисел, поэтому не могут делиться одновременно ни на какое простое число.

Критерии. Правильное решение – 7 баллов. Если приведён рабочий пример без объяснения почему он работает – баллы не снижать. Пример не единственный, нужно проверять.

2. По кругу стоит $2n + 1$ человек – рыцари, которые всегда говорят правду и лжецы, которые всегда лгут. Есть хотя бы один лжец и хотя бы один рыцарь. Какое наибольшее количество человек могло сказать: «Через одного человека от меня есть рыцарь»?

Ответ. $2n$.

Решение. Предположим, что все люди сказали указанную в условии фразу. Рассмотрим любого лжеца (хотя бы один лжец есть по условию). Так как он сказал, что через одного человека от него есть рыцарь, и при этом он солгал, оба человека, стоящие от него через одного, также являются лжецами. Продолжая аналогичные рассуждения, мы получим, что все люди будут лжецами (здесь мы используем, что $2n + 1$ – нечётно). Значит, количество людей, сказавших указанную фразу, не больше $2n$. Если по кругу стоят $2n$ рыцарей и один лжец, то все рыцари могут сказать указанную фразу.

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Оценка – 3 балла, пример – 2 балла.

Типовой ошибкой может быть такое рассуждение: заметим, что если расставить $2n$ рыцарей и 1 лжеца, то все рыцари скажут указанную фразу, а больше быть не может, так как должен быть хотя бы 1 лжец – 2 балла. Так как вдруг какая-то комбинация лжецов и рыцарей даст большее количество. То есть такое рассуждение это просто пример.

Только правильный ответ без объяснений – 0 баллов.

3. В треугольнике MNK биссектриса угла K пересекает сторону MN в точке P , а биссектриса угла M пересекает отрезок KP в точке Q . Оказалось, что отрезки KP и MQ разбили треугольник MNK на три равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника MNK .

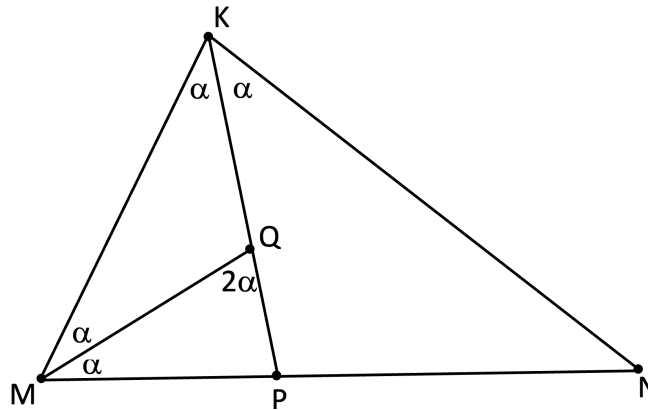
Ответ. 72° , 72° и 36° . **Решение.** Так как сумма углов M и K треугольника MNK меньше, чем 180° , то $\angle QMK + \angle QKM < 90^\circ$, поэтому угол MQK – тупой (см. рис.).

Значит, в равнобедренном треугольнике MQK сторона MK является основанием. Тогда $\angle QMK = \angle QKM = \alpha$, поэтому $\angle NMK = \angle NKM = 2\alpha$. Угол MQP – внешний для треугольника MQK , значит, $\angle MQP = 2\alpha$.

Треугольник MQP также является равнобедренным. Если Q – его вершина, то $\angle QPM = \angle QMP = \alpha$, тогда сумма углов этого треугольника равна 4α . Но 4α – сумма углов M и K

исходного треугольника, то есть меньше 180° . Значит, QP — основание треугольника MQP , а сумма его углов равна 5α . Отсюда $\alpha = 36^\circ$.

Треугольник KPN также оказывается равнобедренным, так как $\angle PKN = \angle PNK = 36^\circ$.



Критерии. Полное решение – 7 баллов.

За отсутствие обоснования «равнобедренности» (не доказано почему именно эти углы равны) – снять 4 балла.

Полный перебор с обоснованием является решением, но как обычно, за отсутствие одного из случаев ставится 0 баллов.

4. В шахматном турнире каждый игрок сыграл с каждым ровно один раз. За победу даётся 1 очко, за ничью – 0,5 очка, за поражение – 0 очков. В турнире участвовали игроки из двух городов M и N . Оказалось, что каждый игрок набрал одинаковое число очков в играх с игроками из города M и из города N . Докажите, что общее число игроков – полный квадрат.

Решение. Пусть m и n – соответственно количество игроков из городов M и N . Каждая игра даёт суммарно 1 очко, поэтому в играх между игроками городов M и N было набрано соответственно C_m^2 и C_n^2 очков. Поскольку каждый игрок набрал одинаковое количество очков в играх с игроками из города M и из города N , а общее число сыгранных игр равно C_{m+n}^2 , получаем равенство $2(C_m^2 + C_n^2) = C_{m+n}^2$, откуда следует, что

$$2 \frac{m(m-1)}{2} + 2 \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(m+n)(m+n-1)}{2},$$

то есть $(m-n)^2 = m+n$. Значит, общее количество игроков, равное $m+n$, есть точный квадрат.

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Решением может быть рассуждения через двудольные графы.

5. На доске написаны числа 1, 1, -1. Время от времени к доске подходит Илья, стирает два числа a и b и заменяет их на $2a+c$ и $\frac{b-c}{2}$, где c – третье из написанных в этот момент на доске чисел (он заменяет два числа, при этом третье остаётся). Докажите, что на доске всегда будет хотя бы одно отрицательное число.

Решение. Заметим, что если числа a и b заменяются на $2a+b$ и $(b-c)/2$, то величина $a+c$ увеличивается ровно в 2 раза, а величина $b+c$ уменьшается ровно в 2 раза. Следовательно, произведение

$$(a+b)(b+c) = ab + bc + ac + c^2$$

не изменяется. А поскольку число c также не менялось, то $ab + bc + ac$ – инвариант.

Проверим, что величина $ab + bc + ac$ является инвариантом преобразования из условия задачи:

$$(2a+c) \cdot \frac{b-c}{2} + c \cdot \frac{b-c}{2} + (2a+c)c = (a+c)(b-c) + (2a+c)c = ab+bc-ac-c^2+2ac+c^2 = ab+bc+ac.$$

Вначале это выражение равно -1 и не меняется при выполнении преобразований. Но если все числа станут неотрицательными, то это выражение тоже станет неотрицательным и не будет равно -1 .

Критерии. Полное решение – 7 баллов.