Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников по математике
2022-2023 учебный год

Решения задач и критерии оценивания. 11 класс

$\boxed{\textbf{11.1}}$ *Чудак не поленился и записал по кругу 2023 числа так, что каждое равно произведению двух соседей. Какое максимальное количество различных чисел могло быть использовано?*

Решение: Если среди чисел есть ноль, то его соседи тоже нули, поэтому все записанные числа будут равны нулю. Будем считать, что среди чисел нулей нет. Пусть a и b — два соседних числа. Тогда с другой стороны от a стоит a/b, а с другой стороны от b стоит b/a. Другими словами, два числа на расстоянии 3 обратны друг другу, а тогда числа на расстоянии 6 равны. Поскольку 2023 взаимно просто с 6, из этого следует, что все числа в любом случае равны друг другу.

Критерии:

- Только ответ с примером — 0 баллов.
- За отсутствие примера, где все числа равны, баллы не снижаются.

$\boxed{\textbf{11.2}}$ *Про числа a и b известно, что система уравнений*

$$\begin{cases} y = x^2 + ax + b \\ x = y^2 + ay + b \end{cases}$$

имеет единственное решение. Докажите, что $a^2 = 2(a + 2b) - 1$.

Решение 1: Заметим, что если (x, y) — решение системы, то (y, x) — тоже решение. Поскольку решения с неравными x и y разбиваются на пары, у системы есть решение с $x = y$, причём ровно одно. Тогда квадратное уравнение $x = x^2 + ax + b$ имеет одно решение. Значит, его дискриминант $(a - 1)^2 - 4b$ равен нулю. Это равносильно утверждению задачи.

Решение 2: Графики уравнений $y = x^2 + ax + b$ и $x = y^2 + ay + b$ симметричны относительно прямой $x = y$. Если парабола $y = x^2 + ax + b$ не пересекается с осью симметрии, то два графика лежат по разные стороны от неё и не пересекаются. Если точек пересечения с осью две, то через каждую из них проходит и вторая парабола, поэтому система имеет хотя бы два решения. Значит, парабола касается прямой, и уравнение $x = x^2 + ax + b$ имеет одно решение.

Критерии:

- Доказано, что при $x \neq y$ решений нет — 2 балла.

$\boxed{\textbf{11.3}}$ *Чудак выбрал 677 различных натуральных чисел из списка 1, 2, 3, ..., 2022. Он утверждает, что сумма никаких двух из выбранных им чисел не делится на 6. Не почудилось ли ему?*

Решение: Предположим чудак прав. Из указанного в условии списка есть ровно по 377 остатков от деления на 6 каждого вида от 0 до 5. Чисел с остатками 0 и 3 можно взять не более одного. Нельзя было брать одновременно числа с остатком 1 и 5, значит в наборе чудака есть либо те, либо другие, а потому не более 337 чисел с остатком 1 или 5. Аналогично с остатком 2 или 4 суммарно не более 337 чисел. Итого, чтобы сумма никаких двух не поделилась на 6, чудак мог выбрать не более $1 + 1 + 337 + 337 = 676$ чисел. Противоречие.

Критерии:

- Замечено, что можно брать не более одного числа кратного 3 и не более одного числа с остатком 3 — 1 балл.

$\boxed{\mathbf{11.4}}$ *У чудака есть N единичных квадратиков, из которых он умудрился составить прямоугольник со сторонами, отличающимися на 9. Чудак не успокоился и составил из этих же N квадратиков другой прямоугольник, но уже со сторонами, отличающимися на 6. Найдите N.*

Решение 1: Если обозначить через x и y меньшие стороны составленных прямоугольников, то получаем уравнение $N = x(x+9) = y(y+6)$. Домножим обе части на 4.

$$4x^2 + 36x = 4y^2 + 24y$$

$$(2x+9)^2 - 81 = (2y+6)^2 - 36$$

$$(2x+2y+15)(2x-2y+3) = 45$$

Обе скобки в левой части целые, причём левая строго больше 15. Единственный делитель числа 45, больший 15 — это само число 45. Значит, $2x+2y+15 = 45$, $2x-2y+3 = 1$. Решив систему, находим $x = 7, y = 8$. Откуда $N = 7 \cdot 16$.

Решение 2: Заметим, что если $x \geqslant y$, то левая часть хотя бы $y(y+9) > y(y+6)$, а если $y \geqslant x+2$, то правая часть хотя бы $(x+2)(x+8) = x^2+10x+16 > x^2+9x = x(x+9)$. Значит, $y = x+1$, откуда несложно получить $x = 7$ и $y = 8$.

Критерии:

- При переборе делителей рассматриваются только натуральные делители, при этом положительность двух множителей не очевидна — снимается до 2 баллов;
- В ответе присутствуют посторонние решения с неположительными x и y — снимается 2 балла.

$\boxed{\mathbf{11.5}}$ *Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках A и C пересекаются в точке T. Лучи AB и TC пересекаются в точке S. Известно, что площади треугольников $\triangle ACT$, $\triangle ABC$ и $\triangle BCS$ совпадают. Докажите, что треугольник $\triangle ABC$ — прямоугольный.*

Решение: Прежде всего заметим, что точки B и T должны лежать по разные стороны от прямой AC, иначе $S(\triangle ABC) < S(\triangle ACT)$. Треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle BCS$ имеют общую высоту, поэтому равенство $S(\triangle ABC) = S(\triangle BCS)$ означает, что $AB = SB$ (1 балл). Треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle ACT$ имеют общее основание, поэтому равенство площадей означает, что точки B и Т равноудалены от прямой AC. Вместе с фактом $AB = BS$ последнее означает, что точка S удалена от AC в два раза дальше, чем T (1 балл). Из этого следует, что $SC = 2CT$ (1 балл). Кроме того, $CT = AT$ как отрезки касательных из одной точки. Так как SC — касательная к описанной окружности, то $SC^2 = SB \cdot SA$. Пусть $CT = 1$, тогда из приведённых выше соотношений получаем $AT = 1$, $ST = SC + CT = 3$, $4 = SC^2 = SB \cdot SA = \dfrac{SA}{2} \cdot SA$, откуда $SA = 2\sqrt{2}$ (1 балл). Поэтому в $\triangle ABC$ выполняется $AT^2 + AS^2 = TS^2$, а, значит, он прямоугольный по обратной теореме Пифагора: $\angle SAT = 90°$. осталось заметить, что $\angle SAT = \angle BAC + \angle ABC$, т.е. $\angle ACB = 90°$.

Критерии:

- Не указано, что точки B и T должны лежать по разные стороны от прямой AC — снимается 1 балл;
- За доказательство отдельных фактов, отмеченных в решении, – по 1 баллу.