Областной этап всероссийской олимпиады школьников
по математике
2023-2024 учебный год
7 класс
Максимальный балл – 35

1. Дима собирал в корзину на берегу реки камушки. Оказалось, что 52% из них блестящие. Когда он отложил из корзины три непонравившихся ему камушка, то среди оставшихся оказалась ровно половина блестящих. Сколько камушков мог насобирать Дима?
Ответ. 25 или 75 камушков
Решение. Вначале блестящих камушков было больше половины, а потом ровно половина. Значит, среди отложенных камушков блестящих не менее половины – два или все три. Если их три, то вместе с половиной оставшихся камушков они составляют 52%, а вторая половина оставшихся - 48%. Три камушка составляют 4%, следовательно, всего камушков 75.
Пусть отложили два блестящих камушка и один иной, после чего половина камушков оказались блетсящими. Если бы вместо этого отложили только один блетсящий камушек, то всё равно половина камушков оказались бы блестящими. Аналогично первому случаю один отложенный блестящий камушек составляет 4%. Тогда всего камушков 25.
Критерии. Полное решение – 7 баллов. Получен только один из ответов – 3 балла. Только правильный ответ без объснений – 0 баллов.

2. Число называется *собранным*, если можно взять два последовательных натуральных числа, и приписать их вместе (в порядке возрастания). Например, 1920 (19 и 20) и 910 (9 и 10) – это *собранные*, а 19020 и 1312 — это не *собранные*. Сколько чисел от 10 до 1000000 являются собранными?
Ответ. 998.
Решение. Посмотрим на то, сколько цифр должно быть в собранных числах. Оно должно состоять из 2–6 цифр и не выше (поскольку 9 991 000 больше 1 000 000). Наименьшее собранное число большее 10 это 12, а наибольшее меньше 1000000 это 998999. Таким образом, все собранные числа, начинающиеся с $1, 2, 3, 4, 5 \ldots 997, 998$, находятся в $[10, 1000000]$ Итого, в $[10, 1000000]$ есть $998 - 1 + 1 = \boxed{998}$ сборных чисел.
Критерии. Полное решение – 7 баллов. Ошибка «эффект ± 1» – снять 2 балла.

3. Миша утверждает, что выписал на доске 16 различных трёхзначных чисел, дающих различные остатки при делении на 16, использовав при этом всего 4 различные цифры. Могут ли слова Миши быть правдой?
Ответ. Могут.
Решение. 111, 112, 113, 114, 211, 212, 213, 214, 311, 312, 313, 314, 411, 412, 413, 414. Остатки при делении на 16 будут соответственно: 15, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14.
Критерии. Полное решение – 7 баллов. Если приведён рабочий пример без объяснения почему он работает – снять 2 балла. Если использовано 5 цифр, или какие-то остатки повторяются – 0 баллов. Пример не единственный, нужно проверять.

4. Для целого числа $n \geq 10$ определим $f(n)$ как число, образовавшееся после удаления первой цифры из n (и удаления всех нулей следующих после первой цифры, например, если было число 12345, то $f(12345) = 2345$, если было число 1002345, то $f(1002345) = 2345$), и определим $g(n)$ как число, образующееся после удаления последней цифры из n. Найдите

сумму решений уравнения $f(n) + g(n) = 2024$.
Ответ. 30953.
Решение. Очевидно, что n должно состоять из 5 цифр. Пусть это будет $\overline{abcde}$. Тогда мы знаем, что

$$\overline{abcd} + \overline{bcde} = 2024$$

a явно равно 1 или 2. Пусть $a = 1$

$$n = \overline{1bcde}$$

$$\overline{bcde} + \overline{1bcd} = 2024 \Rightarrow b = 0$$

$$\overline{cde} + \overline{cd} = 1024 \Rightarrow c = 9$$

$$\overline{de} + \overline{d} = 34$$

$$d = 3, e = 1$$

Таким образом, единственное возможное число для этого случая — 10931. Если $a = 2$, то получаем

$$n = \overline{2bcde}$$

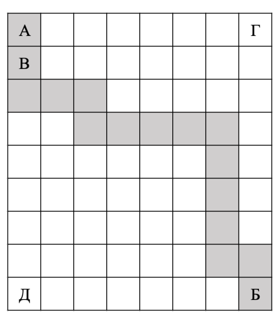
$$\overline{bcde} + \overline{bcd} = 24 \Rightarrow b = c = 0$$

$$\overline{de} + \overline{d} = 24$$

$$d = e = 2$$

Таким образом, другое число 20022. Искомая сумма $\boxed{30953}$.
Критерии. Полное решение – 7 баллов. Верно посчитан только один из случаев – 2 балла.

5. В квадрат 8×8 укладывают всевозможные клетчатые фигуры из 15 клеток. Сколько таких фигур накроют две противоположные угловые клетки квадрата 8×8? (Фигуры, которые после поворотов и переворотов можно совместить наложением, считаются одинаковыми.)
Ответ. $\frac{C_{13}^{6}}{2} + 2^5 = 890$ фигур.
Решение. Назовём нужную фигуру *связкой*. Любую связку можно расположить так, чтобы она закрыла угловые клетки А, Б (см. рисунок). По мосту можно пройти от А до Б, ходя



каждый раз на соседнюю по стороне клетку. При этом придётся сдвинуться не менее 7 раз вниз и не менее 7 раз вправо, что уже даст не менее 15 посещённых клеток (включая А). Значит, каждая связка, размещённая в квадрате, даёт путь ровно из 7 ходов вниз (Н) и 7 ходов вправо (П). Наоборот, выписывая эти Н и П в любом порядке, мы получим путь для связки.

Осталось учесть, что связку можно располагать по-разному, т.е. различные пути могут соответствовать одной и той же связке. Как может быть устроено такое соответствие? Если клетки А и Б остаются на своих местах, то это симметрия относительно диагонали АБ. Будем из каждой пары путей, симметричных относительно диагонали АБ, рассматривать содержащий ещё и клетку В (см. рисунок). Из В в Б надо сделать 6 ходов вниз и 7 вправо, поэтому количество таких путей равно $C_{6+7}^{6} = C_{13}^{6}$.

Совмещения путей АВ–Б могут также менять местами клетки А и Б. Если предпоследняя клетка пути лежит слева от Б, то совмещение достигается осевой симметрией относительно диагонали ГД, а если она лежит выше Б, то центральной симметрией. Все пути АВ–Б, кроме симметричных, разбиваются на пары. Число связок равно сумме числа пар и числа симметричных путей. Посчитаем число осе симметричных путей АВ–Б. Оно равно числу путей от В до диагонали ГД (дальнейший путь однозначно определён). Но мы окажемся на этой диагонали, сделав любые 6 ходов, значит, есть 2^6 путей.

Посчитаем число центрально-симметричных путей. Таких нет. Действительно, на пути нечётное число клеток, поэтому центр пути должен совпадать с центром средней клетки и одновременно с центром доски, а он лежит в вершине клетки. Противоречие.

Итого число связок равно $\frac{C_{13}^{6} - 2^6}{2} + 2^6 = 890$.

Критерии. Полное решение – 7 баллов.