Областной этап всероссийской олимпиады школьников
по математике
2023-2024 учебный год
8 класс
Максимальный балл – 35

1. Пусть x и y — действительные числа, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x + [y] = 2,24 \\ [x] + y = 2,47. \end{cases}$$

Найдите $x + y$.
Как обычно, $[x]$ обозначает целую часть числа x, то есть наибольшее целое, не превосходящее x.
Ответ. $2,71$
Решение.

$$\begin{cases} x + [y] = 2,24, \\ [x] + y = 2,47. \end{cases}$$

Воспользуемся тем, что $a = [a] + \{a\}$, тогда

$$\begin{cases} \{x\} + [x] + [y] = 2,24 \\ [x] + [y] + \{b\} = 2,47 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \{a\} = 0,24 \\ \{b\} = 0,47 \\ [x] + [y] = 2 \end{cases}$$

$$\implies x + y = \boxed{2,71}.$$

Критерии. Полное решение – 7 баллов.

2. Миша утверждает, что выписал на доске 16 различных трёхзначных чисел, дающих различные остатки при делении на 16, использовав при этом всего 4 различные цифры. Могут ли слова Миши быть правдой?
Ответ. Могут.
Решение. 111, 112, 113, 114, 211, 212, 213, 214, 311, 312, 313, 314, 411, 412, 413, 414. Остатки при делении на 16 будут соответственно: 15, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14.
Критерии. Полное решение – 7 баллов. Если приведён рабочий пример без объяснения почему он работает – снять 2 балла. Если использовано 5 цифр, или какие-то остатки повторяются – 0 баллов. Пример не единственный, нужно проверять.

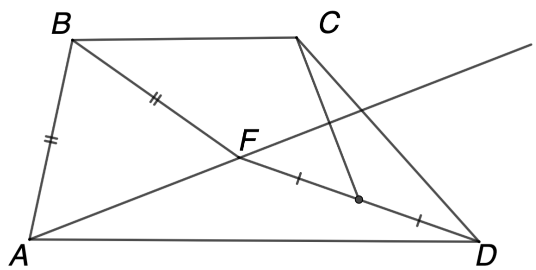
3. Сколько 13-значных чисел-палиндромов делится на 3? (Палиндром не меняется при записи его задом наперёд.)
Ответ. 3 000 000.
Решение. Разобьём такой палиндром на центральную цифру Ц и две группы по 6 цифр. Левая группа образует 6-значное число Л, правая получается записью цифр левого в обратном

порядке. Число N делится на 3, если его сумма цифр $s(N)$ делится на 3. Так как у правой и левой группы суммы цифр одинаковы, то общая сумма цифр равна $2s(\text{Л}) + \text{Ц}$. Она делится на 3 тогда и только тогда, когда $s(\text{Л})$ и Ц дают одинаковые остатки при делении на 3. Всего есть 900 000 шестизначных чисел. Разобьём их на тройки так, чтобы в каждой встречались по разу остатки 0, 1, 2 от деления суммы цифр на 3. Самый простой пример разбиения – на тройки последовательных чисел:
$(100000, 100001, 100002), \ldots, (999997, 999998, 999999)$. В каждой такой тройке числа дают разные остатки, а тогда по свойству равноостаточности и суммы цифр дают разные остатки. Каждый остаток (0, 1, 2) имеют по

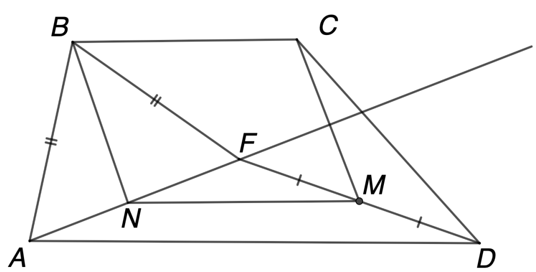
$$900000 : 3 = 300000\,\text{чисел.}$$

Итак, для каждой цифры Ц есть 300 000 вариантов чисел Л, дающих кратный 3 палиндром. Значит, общее количество искомых палиндромов равно 3 000 000.
Критерии. Полное решение – 7 баллов. Палиндром разбит на центральное число и первые шесть цифр и описано, как по центральному числу подбирать шесть цифр и дальнейшего продвижения нет – 3 балла.

4. В трапеции $ABCD$ основание BC в два раза короче основания AD. Внутри трапеции отмечена точка F, такая, что $AB = FB$. Докажите, что прямая, соединяющая точку C с серединой отрезка FD, перпендикулярна FA.



Решение. Пусть M – середина FD, N – середина AF. Отрезок NM – средняя линия треугольника AFD, поэтому $NM||AD||BC$ и $NM = \frac{1}{2}AD = BC$. Следовательно, $NBCM$ – параллелограмм и $BN||CM$. С другой стороны, отрезок BN является медианой ранобедренного треугольника ABF, поэтому $BN \perp AF$. Таким образом, $CM \perp AF$.



Критерии. Полное решение – 7 баллов. Задачу можно решить, отметив серидину стороны AD или подолжив стороны AB и CD до пересечения.

5. Пусть $a, b \geqslant 0$ и $a + b = 2$. Докажите, что

$$a^4 + b^4 + 13ab \geq \frac{119}{8}.$$

Решение. Преобразуем выражение $a^4 + b^4$ следующим образом

$$a^4 + b^4 = \left[(a+b)^2 - 2ab\right]^2 - 2a^2b^2.$$

Используем то, что $a + b = 2$, получим

$$\left[(a+b)^2 - 2ab\right]^2 - 2a^2b^2 = (4 - 2ab)^2 - 2a^2b^2 = 2a^2b^2 - 16ab + 16.$$

Тогда перепишем исходное неравенство, перенеся $\frac{119}{8}$ в левую часть и покажем, что выражение не меньше нуля

$$a^4 + b^4 + 13ab - \frac{119}{8} = 2a^2b^2 - 3ab + \frac{9}{8} = \frac{(4ab-3)^2}{8} \geqslant 0.$$

Отметим, что равенство достигается, например, при $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$.

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Найдены a и b при которых достигается равенство – 1 балл.