Решения и критерии
6 класс

1. Найдите наименьшее число, которое больше 2024, оканчивается на 2024 и делится на 2024.

   Решение:

   Разложим 2024 на простые множители: $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$. Если число оканчивается на 2024, то оно обязательно делится на 8. Значит в начало нужно дописать наименьшее число, которое делится на 11 и на 23. Это число 253. Таким образом, ответ 2532024.

   Критерии:

   Найдено разложение на множители - 2 балла.

   Доказано, что число в любом случае делится на 8 - 2 балла.

   Правильный ответ без обоснования - 0 баллов.

2. Можно ли разрезать квадрат на 6 фигур равной площади, периметр каждой из которых равен половине периметра исходного квадрата?

   Решение: Да, можно, например так:

1	1	1	2	2	2
1	1	3	3	2	2
1	3	3	3	3	2
4	6	6	6	6	5
4	4	6	6	5	5
4	4	4	5	5	5

   Рассмотрим квадрат состороной 6. Каждая фигура обозначена своим номером. У каждой фигуры площадь равна 6 и периметр равен 12. Периметр всего квадрата равен 24.

Критерии:

Правильный пример - 7 баллов.

Неправильный - 0 баллов.

3. Найдите все натуральные числа, которые можно представить в виде суммы трех различных слагаемых, сумма любых двух из которых делится на третье.

Решение:

Пусть искомое число $n = x + y + z$, где $x < y < z$. Тогда $x + y < 2z$ и $x + y$ делится на z, значит $x + y = z$.

Так как $x < y$, то $z < 2y$, и значит $y < x + z < 3y$. Поскольку $x + z$ делится на y, следовательно $x + z = 2y$.

Сложив два равенства, получим $2x + y + z = 2y + z$, значит $y = 2x$, а $z = 3x$. Таким образом, $n = 6x$. То есть, число n кратно 6.

С другой стороны любое кратное 6 число можно разделить на три слагаемых, удовлетворяющих условию. Это 1/6, 1/3 и 1/2 исходного числа.

Ответ: это все числа кратные 6.

Критерии:

Доказано, что любое число кратное 6 можно представить в искомом виде - 2 балла.

Доказано только, что числа не кратные 6 нельзя представить в нужном виде - 5 баллов.

Любые частные примеры - 0 баллов.

4. Найдите количество натуральных чисел, не превосходящих 2024, и имеющих сумму цифр 24.

Решение:

Посчитаем отдельно трехзначные и четырехзначные числа.

Число 24 представляется в виде суммы трех цифр следующими способами: 9+9+6, 9+8+7, 8+8+8. С учетом перестановок цифр получается 3, 6 и 1 число соответственно.

Четырехзначное число может начинаться только с 1. Если начинается с 2, то максимальная сумма цифр у числа 2019 и равна 13.

Число 23 представляется в виде суммы трех цифр следующими способами: $9+9+5$, $9+8+6$, $9+7+7$, $8+8+7$. С учетом перестановок цифр, получаем 3, 6, 3 и 3 числа соответственно.

Таким образом, всего 25 чисел.

Критерии:

Правильно посчитаны только трехзначные числа - 2 балла.

Правильно посчитаны только четырехзначные числа - 2 балла.

Если все правильно посчитано - 7 баллов.

Если никак не отмечено, что первая цифра не может быть 2 - минус 1 балл.

5. В шахматном турнире по круговой системе с шестью участниками в какой-то момент Саша и Маша сыграли одинаковое количество партий. А все остальные попарно различное как друг с другом, так и с Сашей и Машей. По сколько партий сыграли Саша и Маша, если известно, что каждый участник турнира сыграл хотя бы по одной партии?

   Решение:

   Каждый участник турнира сыграл от 1 до 5 партий. И все эти числа различны, кроме двух (у Саши и Маши), значит каждое из этих чисел встречается хотя бы по разу.

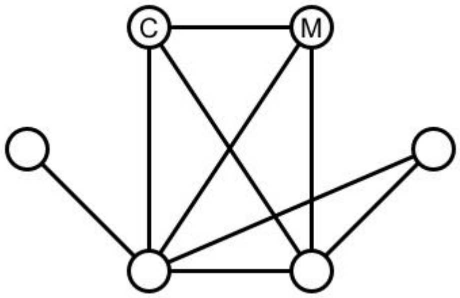
   Поскольку каждую партию играли двое, то сумма чисел сыгранных партий всеми участниками чётна. Значит Саша и Маша могли сыграть по 1, 3 или 5 партий.

   Если Саша и Маша сыграли по 5 партий, то каждый из остальных сыграл и с Сашей и с Машей, значит число 1 не встречается. Противоречие.

   Если Саша и Маша сыграли по 1 партии, то оба они сыграли с участником, который сыграл 5 партий, но тогда участник сыгравший 4 партии не играл ни с Сашей, ни с Машей. Что невозможно.

   Таким образом, они могли сыграть только по 3 партии.

   Возможен такой пример:



Критерии:

Доказано, что Саша и Маша могли сыграть только нечетное число партий - 2 балла.

Приведен пример на 3 игры - 1 балл.

Доказано, что они не могли сыграть 5 партий (или 1 партию) - 2 балла за каждый случай.

Баллы складываются.