Областная олимпиада школьников по математике

Март 2022

7 класс

1. Маше подарили набор гирек весами $1, 2, 3, 5, 8, 13$ (всех по одной) и чашечные весы. Сколькими способами Маша может уравновесить весы, если все гири использовать необязательно, но оставлять чаши пустыми нельзя? Способы, отличающиеся только перестановкой чаш, считаются одинаковыми.
Ответ. 8 способами.
Решение. $1+2=3$, $1+2+5=8$, $1+2+13=3+5+8$, $1+2+5+8=3+13$, $2+3=5$, $2+3+8=13$, $3+5=8$, $5+8=13$.
Критерии. Если в решении преложен вариант $0=0$ и ответ 9, остальное верно, то снять 1 балл. Если не учтён какой-либо вариант – 0 баллов, так как задача как раз о переборе. Если приведены данные варианты и нет доказательства, что других нет – баллы не снимать. Полное решение – 7 баллов.

2. После урока математики, где рассказывалась тема "последовательность чисел Фибоначчи" , Артем решил придумать свою последовательность и сделал её следующим образом: 1, 2, 4, 8, 16, 22, 24, ... каждое число начиная со второго получается прибавлением к предыдущему числу его последней цифры. Какое число стоит на тысячном месте?
Ответ. 4988.
Решение. Понятно, что последние цифры членов последовательности образуют цикл $(2, 4, 8, 6)$. При этом числа каждой заполненной строки, начиная со второй, на 20 больше, чем соответствующие числа предыдущей. Это объясняется тем, что соседние в столбце числа различаются на $2+4+6+8=20$.

1	2	4	8	16
	22	24	28	36
	42	44	48	56
	...	...	...	...

Отбросим 1, тогда искомое число стоит на 999−м месте. Так как $999 = 4 \cdot 249 + 3$, то искомое число стоит в строке с номером 250 на третьем месте (не считая первой пустой клетки). Следовательно, оно равно $20 \cdot 249 + 8 = 4988$.
Критерии. Допущена ошибка "± 1" , остальное верно – 4 балла. Если вдруг выписаны все 1000 элементов – 7 баллов. Описана закономерность без дальнейших продвижений – 2 балла. Полное решение – 7 баллов.

3. Миша и Саша на рынке нашли два арбуза и дыню. Арбузы весят 3600 гр. и 4200 гр. соответственно (разделять арбузы и дыню на части нельзя). Миша разделил найденное между ними следующим образом: ему досталось на 80% по весу больше, чем Саше. Саше это не понравилось, поэтому он придумал другой способ дележа: ему досталось на 40% больше, чем Мише. Сколько граммов могла весить дыня? Найдите все варианты и докажите, что других нет.
Ответ. 2280 грамм.
Решение. Посмотрим, что могло достаться Мише при первом дележе.
1) Один арбуз. Тогда его масса не может быть на 80% больше Сашиной доли. Этот случай невозможен.
2) Оба арбуза. Тогда дыня весит $(3600 + 4200) : 1,8 = \frac{13000}{3}$ г. Всё вместе весит $\frac{36400}{3}$ г, Саша взял себе $\frac{63700}{9}$ г., что невозможно.
3) Лёгкий арбуз и дыня. Тогда дыня весит $4200 \cdot 1,8 - 3600 = 3960$ г. Всё вместе весит 11760

г., Саша взял себе 6860 г., что невозможно.
4) Тяжелый арбуз и дыня. Тогда дыня весит $3600 \cdot 1,8 - 4200 = 2280$ г. Всё вместе весит 10080 г., саша взял себе 5880 г., то есть легкий арбуз и дыню.
5) Только дыня. Тогда она весит $(3600 + 4200) \cdot 1,8 = 14040$ г. Всё вместе весит 21840 г., Саша взял себе 12740 г., что невозможно.
Критерии. Рассмотрен только вариант, где получается верный ответ – 2 балла. Пропущен какой-то вариант – снять 2 балла. Арифметическая ошибка – снять 1 балл. Полное решение – 7 баллов.

4. На каждой клетке доски 20×20 лежит по карточке с числом. В каждой паре соседей (клеток с общей стороной) числа разные. Докажите, что карточки можно переложить в клетки полоски 2×200 так, чтобы по-прежнему в каждой паре соседей числа были разными.
Решение. Разрезав доску на 200 домино 2×1, получим в каждом из них пару карточек-соседей. В каждой паре два разных числа (по условию задачи). Будем заполнять 200 столбиков полоски такими парами последовательно слева направо. Пусть несколько столбиков уже заполнены и совпадений чисел по горизонтали нет. Берём любую пару и кладём её произвольно в очередной столбик. Если оказалось, что при этом возникло совпадение чисел соседей по горизонтали, поменяем местами карточки в правом столбике. Теперь в последних двух столбиках числа N стоят по диагонали. Два других числа из этих столбиков с N не совпадают (иначе совпали бы числа внутри пар). Можно переходить к заполнению следующего столбика.
Замечание. Практически удобнее разрезать доску на полоски 2×20 и собирать из них, но способ решения проблем на стыках остаётся тем же самым.
Критерии. Приведена конкретная расстановка карточек и показано как собрать конкретные числа в полосу 2×200 – 0 баллов. Рассмотрена идея доминошек 2×1 или полос 2×20, но не описано решение проблемы на стыках – 2 балла. Полное решение – 7 баллов.

5. В замке собрались шуты, палачи и мудрецы. Шуты врут палачам, палачи врут мудрецам, мудрецы врут шутам. В остальных случаях все говорят правду. Как-то 50 жителей замка сели за круглым столом. Каждый повернулся к своему левому соседу и назвал то, кем он является. Затем каждый повернулся к своему правому соседу и снова представился. Оказалось, что фраза "Я палач" прозвучала ровно 90 раз. Какое наименьшее количество палачей могло быть за столом?
Ответ. 20.
Решение. *Оценка.* В каждой паре соседей из двух заявлений не более одной лжи. То есть всего не более 50 неправд. В частности, не более 50 неправд вида "Я палач" . Значит, не менее 40 таких фраз верны и их произносят палачи. Поэтому палачей не менее 20.
Пример. с 20 палачами: поставим подряд 20 палачей, затем 5 мудрецов. Затем между каждыми двумя уже стоящими участниками круглого стола поставим по шуту (25 шутов):

$$\text{ШПШПШ}\ldots\text{ПШМШМШМШМШМ}.$$

Первые 41 участников (до первого мудреца) образуют 40 пар вида ШП или ПШ. В каждой такой паре палач говорит шуту правду, а шут, обманывая палача, может сказать, что он палач. Итого имеем уже 80 нужных фраз. Оставшиеся 10 пар соседей имеют вид МШ или ШМ. В каждой из них шуты говорят мудрецам правду, а мудрецы могут соврать шутам, назвавшись палачами, – ещё 10 нужных фраз. Итого, прозвучит ровно 90 нужных фраз.
Критерии. Только оценка – 2 балла. Только пример – 4 балла. Если приведена правильная! последовательность шутов, палачей и мудрецов, но не описано почему пример работает – 1 балл. Полное решение – 7 баллов.