Областная олимпиада школьников по математике

Март 2022

8 класс

1. Можно ли выписать в строку числа 1, 2, 3, ..., 77 таким образом, чтобы суммы любых пар соседей были равны или отличались на 1?
Ответ. Да.
Решение. Например, $1, 77, 2, 76, 3, 75, \ldots, 38, 40, 39$. В этой последовательности, числа, стоящие через одно, должны отличаться ровно на 1.
Критерии. Приведена верная последовательность или понятно как она строилась без описания – баллы не снижать. Полное решение – 7 баллов.

2. После урока математики, где рассказывалась тема "последовательность чисел Фибоначчи" , Артем решил придумать свою последовательность и сделал её следующим образом: 1, 2, 4, 8, 16, 22, 24, ... каждое число, начиная со второго, получается прибавлением к предыдущему числу его последней цифры. Какое число стоит на тысячном месте?
Ответ. 4988.
Решение. Понятно, что последние цифры членов последовательности образуют цикл $(2, 4, 8, 6)$. При этом числа каждой заполненной строки, начиная со второй, на 20 больше, чем соответствующие числа предыдущей. Это объясняется тем, что соседние в столбце числа различаются на $2 + 4 + 6 + 8 = 20$.

1	2	4	8	16
	22	24	28	36
	42	44	48	56
	...	...	...	...

Отбросим 1, тогда искомое число стоит на 999−м месте. Так как $999 = 4 \cdot 249 + 3$, то искомое число стоит в строке с номером 250 на третьем месте (не считая первой пустой клетки). Следовательно, оно равно $20 \cdot 249 + 8 = 4988$.
Критерии. Допущена ошибка "± 1" , остальное верно – 4 балла. Если вдруг выписаны все 1000 элементов – 7 баллов. Описана закономерность без дальнейших продвижений – 2 балла. Полное решение – 7 баллов.

3. Коля решил проверить навыки умножения чисел у своих одноклассников и предложил перемножить два положительных числа. Миша смог перемножить только целые части этих чисел и получил 24. Саша умножил целую часть первого числа на дробную часть второго числа и получил 1,2. А Паша перемножил дробную часть первого числа на целую часть второго числа и получил 2. Какое произведение должно было получиться?
Ответ. 27,3.
Решение. Пусть x – первое число, y – второе число. Тогда условие задачи можно переписать так:

$$[x] \cdot [y] = 24, \tag{1}$$

$$[x] \cdot \{y\} = 1,2 \tag{2}$$

$$\{x\} \cdot [y] = 2, \tag{3}$$

где $[x]$ – целая часть числа, $\{x\}$ – дробная часть числа. Требуется найти произведение этих чисел, то есть

$$x \cdot y = ([x] + \{x\}) \cdot ([y] + \{y\}) =$$
$$= [x] \cdot [y] + [x] \cdot \{y\} + \{x\} \cdot [y] + \{x\} \cdot \{y\}. \tag{4}$$

Три первых слагаемых последней суммы известны из условий (1)–(3). Чтобы найти последнее слагаемое, перемножим почленно равенства (2) и (3) и заменим в полученном произведении $[x] \cdot [y]$ на 24

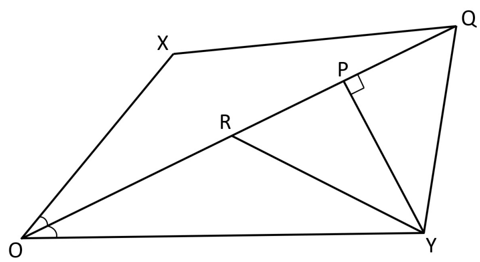
$$[x] \cdot \{y\} \cdot \{x\} \cdot [y] = 2,4,$$
$$\{y\} \cdot \{x\} = 0,1.$$

Тогда $x \cdot y = 24 + 1,2 + 2 + 0,1 = 27,3$.

Критерии. Получено равенство (4) без дальнейших продвижений – 2 балла. Полное решение – 7 баллов.

4. Дан угол XOY, в нем проведена биссектриса. Выберем на биссектрисе точку Q и на отрезке OQ выберем точку P такую, что $\angle YPQ = 90°$. Пусть $PQ = 1$, $XO = 2$, $OP = 3$ и $YO = 4$. Докажите, что треугольник XQY равнобедренный.

Решение. Отметим на отрезке OP точку R так, что $RP = 1$, тогда $OR = 2$. Треугольники XOQ и ROY равны по первому признаку: $OX = OR = 2$, $OY = OQ = 4$, $\angle XOQ = \angle ROY$. Следовательно, $XQ = RY$. Далее, отрезок YP является медианой и высотой в треугольнике RYQ. Значит, $RY = QY$. Таким образом, $XQ = QY$, следовательно, треугольник XQY равнобедренный.



5. В однокруговом хоккейном турнире команда "Лицеисты" заняла первое место, набрав больше всех очков, а команда "Гимназисты" – последнее место, набрав меньше всех очков. Если бы за победу давали не 3 очка, а 2, то наоборот, "Гимназисты" стали бы первыми, а "Лицеисты" – последними. Какое наименьшее количество команд могло играть в турнире? (В хоккейном турнире за победу дают 3 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков.)

Ответ. 12.

Решение. *Оценка.* До пересчёта у команды "Лицеисты" было хотя бы на 2 очка больше, чем у команды "Гимназисты", а после пересчёта – хотя бы на 2 очка меньше. Кроме того, чтобы после пересчёта оказаться первой, команда "Гимназисты" должна иметь хотя бы одну победу. Действительно, в каждом матче разыгрывается 2 очка, поэтому если бы у команды "Гимназисты" не было побед, то она набрала бы не более половины возможного числа очков и не могла бы стать первой. Аналогично, для того чтобы команда "Лицеисты" стала последней, у неё должно быть поражений больше, чем побед. Таким образом, после пересчёта команда "Гимназисты" потеряет как минимум 1 очко. Следовательно, команда "Лицеисты" должна потерять не менее 5 очков, то есть у неё должно быть не меньше пяти побед и не меньше шести поражений. Поэтому она сыграла как минимум 11 матчей, значит, в турнире участвовало не менее 12 команд.

Пример. Турнир на 12 команд, удовлетворяющий условию, приведён в таблице ниже (буквой В обозначен выигрыш, два последних столбца – количество очков до и после пересчёта соответственно).

Команда	Лиц	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Гим	Сумма 1	Сумма 2
Лиц	■	В	В	В	В	В	0	0	0	0	0	0	15	10
2	0	■	1	1	1	1	В	В	В	0	0	1	14	11
3	0	1	■	1	1	1	0	В	В	В	0	1	14	11
4	0	1	1	■	1	1	0	0	В	В	В	1	14	11
5	0	1	1	1	■	1	В	0	0	В	В	1	14	11
6	0	1	1	1	1	■	В	В	0	0	В	1	14	11
7	В	0	В	В	0	0	■	1	1	1	1	1	14	11
8	В	0	0	В	В	0	1	■	1	1	1	1	14	11
9	В	0	0	0	В	В	1	1	■	1	1	1	14	11
10	В	В	0	0	0	В	1	1	1	■	1	1	14	11
11	В	В	В	0	0	0	1	1	1	1	■	1	14	11
Гим	В	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	■	13	12

Замечание. Доказав, что команда "Лицеисты" одержала не меньше пяти побед, можно рассуждать и по-другому. После пересчёта у команды "Лицеисты" не менее 10 очков, а у команды "Гимназисты" не менее 12 очков, а у каждой из остальных команд не менее 11 очков. Так как суммарное количество набранных очков после пересчёта равно $n(n-1)$, где n – количество команд, то $12 + 10 + 11(n-2) \leqslant n(n-1)$, откуда $n \geqslant 12$.

Критерии. Пример не единственный, необходимо проверять. Только оценка – 4 балла. Только пример – 3 балла. Полное решение – 7 баллов.