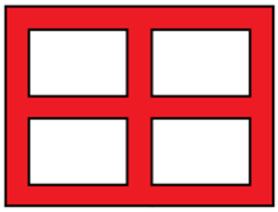
Областная олимпиада школьников по математике

Решение задач

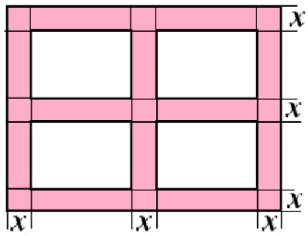
6 класс

1. В прямоугольном листе картона с периметром 108 см вырезают 4 одинаковых прямоугольных отверстия для фотографий. Получается рамка, имеющая везде одинаковую ширину (см. рисунок). Найдите ширину рамки, если периметр одного отверстия равен 39 см.



Ответ: 2,5 см

Решение. Обозначим ширину рамки x, размеры отверстия – a и b, тогда периметр картонного листа равен $4a + 4b + 12x$. Периметр отверстия $2(a + b) = 39$, а периметр листа по условию 108. Получаем уравнение $2 \cdot 39 + 12x = 108$. Тогда ширина рамки равна 2,5.



Комментарий. Верное решение – 7 баллов.

Проводятся верные рассуждения и верно составлено уравнение, но допущена вычислительная ошибка – 5-6 баллов.

Проводятся верные рассуждения, но допущена ошибка при составлении уравнения – 3 балла.

Без решения приведен ответ и выполнена проверка на частном случае – 2 балла.

Только ответ – 0 баллов.

2. На доске написано число 17. Каждую минуту число стирают с доски и записывают на его место произведение его цифр, увеличенное на 16. Какое число окажется на доске через 20 часов 22 минуты?

Ответ: 16

Решение. В течение нескольких первых минут на доске появятся числа:

$$17 \xrightarrow[7+16]{} 23 \xrightarrow[6+16]{} 22 \xrightarrow[4+16]{} 20 \xrightarrow[0+16]{} 16 \xrightarrow[6+16]{} 22 \longrightarrow \cdots$$

Заметим, что, начиная с третьей минуты, числа $22, 20, 16$ повторяются с периодом 3. Так как 20 часов 22 минуты можно записать как $1222 = 2 + 406 \cdot 3 + 2$ минуты, то через 20 часов 22 минуты на доске будет записано третье число из (407-го) периода, то есть 16.

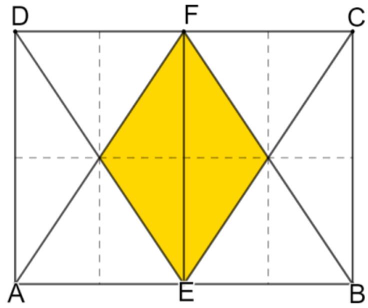
Комментарий. Верное обоснованное решение – 7 баллов.

Показано появление повторений с периодом 3 в замене чисел и неверно найдено число – 4 балла.

Только ответ – 0 баллов.

3. В прямоугольнике $ABCD$ точки E и F – середины сторон AB и CD соответственно. Точку E соединили с вершинами C и D, а точку F – с вершинами A и B (см. рисунок). Найдите площадь закрашенной части, если стороны прямоугольника равны 6 и 8 (на рисунке размеры искажены).

Ответ: 12



Решение. Проведём отрезок EF, который делит прямоугольник на два равных прямоугольника. Каждый из них разбивается диагоналями на 4 равные по площади части. Тогда из 8 равных по площади частей – две закрашены, т.е. площадь закрашенной части составляет $\frac{1}{4}$ от площади прямоугольника $ABCD$ и равна $\frac{1}{4} \cdot 48 = 12$.

Комментарий.

Верное обоснованное решение – 7 баллов.

Если в решении существенным является использование длин сторон прямоугольника, то за верное рассмотрение только одного случая (например, либо $AB = 6$, либо $AB = 8$) ставится 5 баллов.

Только ответ – 0 баллов.

4. В магазине проходит акция «Каждый четвёртый товар – бесплатно». При печати чека покупки выстраиваются по убыванию цены, и все товары с номерами, кратными четырём, выдаются бесплатно. Петя и Маша выбрали товаров в сумме на 40 000 рублей и оплатили их двумя чеками. Благодаря акции каждый из них сэкономил по 1000 руб. Какое максимальное количество денег они могли бы сэкономить, если бы оплачивали покупки сообща одним чеком?

Ответ: 10000 рублей

Решение. Приведем пример, показывающий, что экономия в 10000 рублей возможна:

Чек Пети	
1-й товар	9000
2-й товар	9000
3-й товар	9000
4-й товар	1000

Чек Маши	
1-й товар	9000
2-й товар	1000
3-й товар	1000
4-й товар	1000

Экономия у каждого по 1000 рублей. Если бы чек был общим, то экономия была бы $9000 + 1000 = 10000$ рублей.

С другой стороны, больше 10000 рублей они сэкономить не могли, поскольку непосредственно перед каждым бесплатным товаром в чеке заведомо идут три небесплатных, каждый из которых не дешевле его и за которые пришлось заплатить. Таким образом, экономия составляет не больше четверти стоимости покупки, т. е. не больше 10 000 рублей.

Комментарий.

Верное обоснованное решение – 7 баллов.

Обосновано получена оценка без примера – 4 балла.

Построен только верный пример (представлены оба чека) – 3 балла.

Только ответ – 0 баллов.

5. Дети в классе угощали друг друга конфетами. Каждый мальчик дал по конфете всем, кто выше его, а каждая девочка – всем, кто ниже ее (все дети разного роста). Оказалось, что Саша, Женя и Валя получили поровну конфет, а все остальные – меньше, чем они. Докажите, что кто-то из этих троих – девочка.

Решение.

Допустим, что это не так (т.е. они все мальчики). Пусть мальчик Саша – наименьший по росту из трех упомянутых детей. Пусть X – следующий по росту ребенок.

Заметим, что Саша и X получили поровну конфет от всех остальных детей. Действительно, каждый из остальных детей либо ниже и Саши, и X, либо выше их обоих. Тогда и Саша, и X получили конфеты только от мальчиков, которые меньше их ростом, либо от более высоких девочек.

Кроме того, мальчик Саша дал конфету ребенку X, так как ребенок X выше. Поскольку Саша – один из тех, кто получил наибольшее число конфет, не может быть так, что X получил больше конфет, чем Саша. Значит, X должен был дать конфету Саше. Получается, что X – девочка и у нее столько же конфет, сколько у Саши, т. е. X это Женя или Валя.

Комментарий. Полное решение – 7 баллов.

За правильный ответ без обоснования – 0 баллов.