

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

2023/2024 учебный год

6 класс

Максимальный балл – 35

1. К некоторому числу прибавили его сумму цифр и получили число 2023.
Найдите все такие числа.

Решения:

1 случай. Искомое число имеет вид 20АБ, то есть равно $2000 + 10А + Б$. Тогда сумма числа и его суммы цифр равна

$$2000 + 10А + Б + 2 + 0 + А + Б = 2002 + 11А + 2Б$$

$$2002 + 11А + 2Б = 2023$$

$$11А + 2Б = 21$$

Тогда единственный вариант $А = 1$, $Б = 5$, Искомое число 2015.

2 случай. Искомое число имеет вид 19АБ, то есть равно $1900 + 10А + Б$. Тогда сумма числа и его суммы цифр равна

$$1900 + 10А + Б + 1 + 9 + А + Б = 1910 + 11А + 2Б$$

$$1910 + 11А + 2Б = 2023$$

$$11А + 2Б = 113$$

Легко видеть, что $А$ нечётное число, меньшее 11.

$$Б = (113 - 11А) : 2$$

Если $А = 9$, то $Б = (113 - 99) : 2 = 7$. Подходит, искомое число 1997.

Если $А = 7$, то $Б = (113 - 77) : 2 = 18$ – не подходит.

Ясно, что при дальнейшем уменьшении числа $А$ число $Б$ будет ещё больше.

Ответ: 1997, 2015.

Приведен только 1 пример и больше ничего – 2 балла, 2 примера и больше ничего – 3 балла. (вне зависимости от демонстрации правильности).

Есть попытки алгебраической или словесной организации процесса поиска, не приведшие к верному ответу – 2 балла. То же, но получен 1 (2) ответа, но есть недостатки обоснования – 4 (5) баллов. Верное решение – 7 баллов.

2. Замените звёздочки цифрами так, чтобы равенство стало верным и все семь цифр были различными: $** + 23 = ***$. Найдите все возможные варианты.

Решение:

$98 + 23 = 121$, поэтому (с учетом того, что все цифры выражения должны быть различны) кроме чисел 104...109 других значений сумма принимать не может. Перебор по этим 6 вариантам дает 2 подходящих: $84 + 23 = 107$, $86 + 23 = 109$.

Приведен только 1 пример и больше ничего – 2 балла, 2 примера и больше ничего – 3 балла. (вне зависимости от демонстрации правильности).

Есть попытки алгебраической или словесной организации процесса поиска, не приведшие к верному ответу – 2 балла. То же, но получен 1 (2) ответа, но есть недостатки обоснования – 4 (5) баллов. Верное решение – 7 баллов.

3. Трёхметровые и четырёхметровые доски распилили на доски по одному метру. Каждым распилом пилили ровно одну доску. Сколько сделано распилов, если вначале было тридцать досок суммарной длины 100 метров. Обоснуйте свой ответ.

Решение:

Пусть все 30 досок длиной 3 метра. Тогда суммарная длина была бы 90 метров. $(100 - 90) : (4 - 3) = 10$. Поэтому 10 досок должны быть по 4 метра, а остальные 20 по 3. Так как распилов на 1 меньше, чем количество частей, то всего $(4-1) \cdot 10 + (3-1) \cdot 20 = 70$ распилов.

Только ответ и больше ничего 2 балла. Верная демонстрация того, почему такое количество досок подходит и дальнейшее верное вычисление количества распилов 4 балла. Решение в целом верное, но есть арифметические или логические ошибки – 4 или 5 баллов в зависимости от ситуации. Полное решение 7 баллов. Остальные случаи – 0 баллов.

4. Среднее арифметическое четырёх чисел равно 23. Если вычеркнуть одно из этих чисел, то среднее арифметическое оставшихся трёх увеличится на 1, если вместо этого вычеркнуть другое число, то среднее арифметическое оставшихся чисел увеличится на 2, а если вычеркнуть только третье число, то среднее арифметическое оставшихся увеличится на 3. На сколько изменится среднее арифметическое трёх оставшихся чисел, если вычеркнуть четвёртое число? Обоснуйте свой ответ. (Средним арифметическим нескольких чисел называется сумма этих чисел, делённая на их количество)

Решение: обозначим среднее арифметическое S . Тогда сумма исходных четырёх чисел равна $4S$. Пусть искомое увеличение среднего арифметического при вычеркивании четвертого числа равно X . Положительное значение X будет означать увеличение, отрицательное – уменьшение. Тогда

Сумма без первого: $3(S-1) = 3S - 3$.

Сумма без второго: $3(S-2) = 3S - 6$.

Сумма без третьего: $3(S-3) = 3S - 9$.

Сумма без четвертого: $3(S-X) = 3S - 3X$.

Сложив эти 4 суммы, получим сумму, в которую каждое из 4 чисел входит по три раза, а значит эта сумма равна $12S$. Тогда

$$12S = (3S - 3) + (3S - 6) + (3S - 9) + (3S - 3X)$$

$$12S = 12S - 3(1+2+3+X)$$

$$X = -6.$$

Ответ: уменьшится на 6.

Только верный ответ без каких-либо пояснений 2 балла. Разумные попытки решения, не приведшие к верному ответу 1-3 балла в зависимости от величины продвижения. Решение в целом есть, но есть недостатки обоснования или арифметические ошибки 5 баллов. Верное решение 7 баллов.

5. Нарисуйте восемь лучей так, чтобы они пересекались ровно в 5 точках, по три луча в каждой точке. Отметьте начала лучей жирными точками.

Решение:

