

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников
по математике
2023/2024 учебный год**

9 класс

1. У чудака есть набор из 7 бумажных прямоугольников с целыми сторонами, имеющими площадь 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Какие прямоугольники он может гарантированно составить, используя весь набор прямоугольников?
2. Определите количество таких пар натуральных чисел (m, n) , что $m \leq n$ и

$$\text{НОД}(m, n) = 2023, \text{НОК}(m, n) = 20! \cdot 23!.$$

(Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.)

3. Ненулевые различные целые числа a , b , c и d таковы, что a и c положительны и не являются квадратами натуральных чисел. Могло ли оказаться, что уравнения $x^2 + \sqrt{a}x + b = 0$ и $x^2 + \sqrt{c}x + d = 0$ имеют общий корень?
4. На плоскости нарисовано две окружности с общим центром. Из точки A , лежащей вне их, проведены две прямые, касающиеся большей окружности в точках B и C , и прямая, касающаяся меньшей окружности в точке D . Докажите, что DA – биссектриса угла $\angle BDC$.
5. Докажите, что любое целое число от 1 до $2023!$ можно представить суммой различных делителей числа $2023!$ (в сумме может быть одно число).

Каждая задача оценивается в 7 баллов.